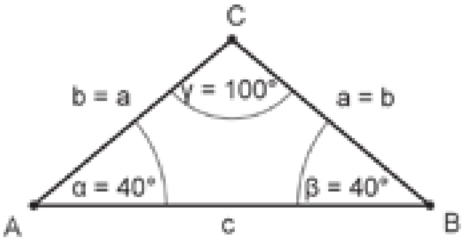
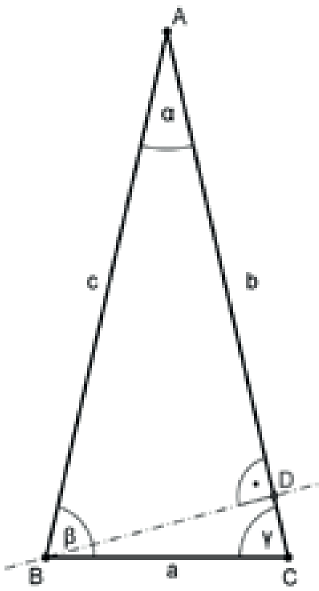


Bei den folgenden Beispielen gehen wir nun auf die Suche nach der Größe der Winkel in verschiedenen Dreiecken (siehe auch Kapitel 1.2. „Dreieck“). Aus der Schule sollte bekannt sein:
Sind zwei Seiten gleich lang, dann sind auch die beiden gegenüberliegenden Winkel gleich groß.
Umgekehrt gilt auch: Sind zwei Winkel gleich groß, dann sind auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.
In beiden Fällen liegt ein **gleichschenkliges Dreieck** vor.

B

Beispiel G1.01
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis a wird die Höhe auf die Seite b mit dem Höhenfußpunkt D eingezeichnet.
Wie groß ist der Winkel <CBD, wenn $\alpha = {<}BAC = 28°$ beträgt?



L

1. Lösung
$\beta = \gamma = (180° - 28°) : 2 = 76°$ (gleichschenkliges Dreieck BCA)
$<DBA = 90° - 28° = 62°$
(Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ABD)
$<CBD = \beta - <DBA = 76° - 62° = 14°$

Es geht auch etwas schneller:

L

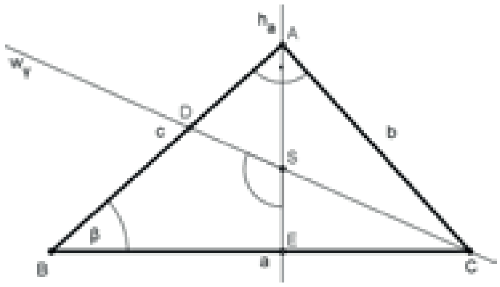
2. Lösung
$\beta = \gamma = (180° - 28°) : 2 = 76°$ (gleichschenkliges Dreieck BCA)
$<CBD = 90° - \gamma = 14°$
(Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck BCD)

B

Beispiel G1.02
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC (rechter Winkel in A) mit $\beta = 42°$ wird die Winkelsymmetrale w_γ in C und die Höhe h_a auf die Seite a eingezeichnet. Unter welchem stumpfen Winkel schneiden sich w_γ und h_a?

L

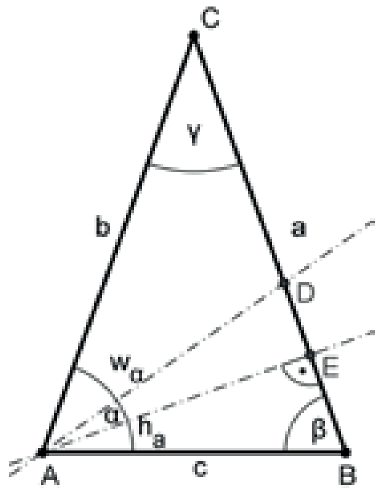
Lösung
Sei D der Schnittpunkt von w_γ mit der Seite c, E der Schnittpunkt von h_a mit der Seite a und S der Schnittpunkt von w_γ und h_a.



$\gamma = 90° - 42° = 48°$ (Winkelsumme im Dreieck ABC)
$<DCB = <SCE = 48° : 2 = 24°$ (Winkelsymmetrale)
$<ESC = 90° - 24° = 66°$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CSE)
$<DSE = 180° - 66° = 114°$ (Supplementärwinkel)

B

Beispiel G1.03
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis c werden die Winkelsymmetrale w_α in A und die Höhe h_a auf die Seite a eingezeichnet.
Wie groß ist der spitze Winkel zwischen w_α und h_a, wenn $\gamma = 40°$?

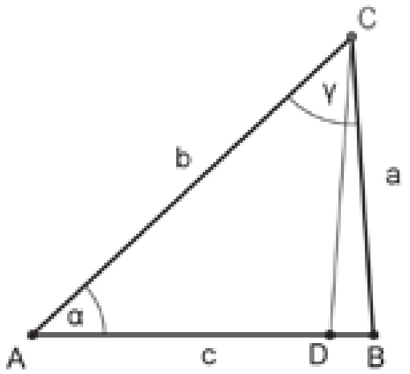


L

Lösung
Sei D der Schnittpunkt von w_α mit der Seite a und E der Schnittpunkt von h_a mit der Seite a.
$\alpha = \beta = (180° - 40°) : 2 = 70°$
(Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck ABC)
$\sphericalangle BAD = 70° : 2 = 35°$ (Winkelsymmetrale)
$\sphericalangle BAE = 90° - \beta = 90° - 70° = 20°$
(Winkelsumme im Dreieck ABE)
$\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAE = 35° - 20° = 15°$

B

Beispiel G1.04
In einem Dreieck ABC mit $\alpha = 43°$ hat der Punkt D auf der Seite c die Eigenschaft, dass die Strecken AD, DC und BC gleich lang sind. Berechne γ!



L

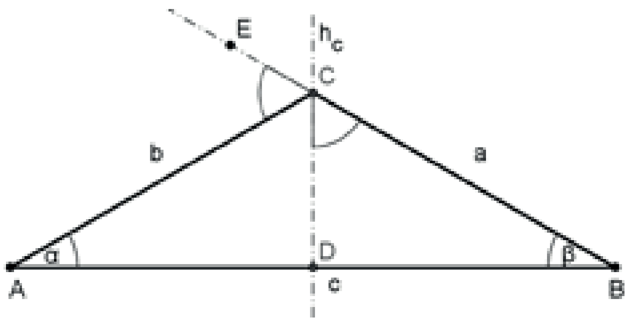
Lösung
$\sphericalangle ACD = \alpha = 43°$ (gleichschenkliges Dreieck ADC)
$\sphericalangle CDA = 180° - 2\,\alpha = 180° - 86° = 94°$
(Winkelsumme im Dreieck ADC)
$\sphericalangle BDC = 180° - 94° = 86°$ (Supplementärwinkel)
$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = 86°$ (gleichschenkliges Dreieck DBC)
$\sphericalangle DCB = 180° - 2 \cdot \sphericalangle CBD = 180° - 172° = 8°$
(Winkelsumme im Dreieck DBC)
$\gamma = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 43° + 8° = 51°$

B

Beispiel G1.05
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis c verlängere man einen Schenkel über den Punkt C hinaus. Der Winkel, den diese Verlängerung mit dem anderen Schenkel einschließt, sei genauso groß wie der Winkel zwischen Schenkel und Höhe h_c.
Berechne alle drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

L

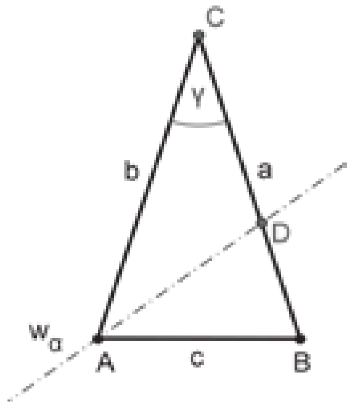
Lösung
Sei D der Höhenfußpunkt von h_c und E ein gedachter Punkt auf der Schenkelverlängerung.
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und damit symmetrisch mit der Höhe h_c als Symmetrieachse.
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ (Symmetrie)
$\sphericalangle ECA = \sphericalangle ACD$ (Angabe)
$\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle ECA = 180°$
(gestreckter Winkel ECB)
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \sphericalangle ECA = 180° : 3 = 60°$
$\gamma = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 60° + 60° = 120°$



$\alpha = \beta = (180° - \gamma) : 2 = (180° - 120°) : 2 = 30°$ (Winkelsumme im Dreieck ABC)

B

Beispiel G1.06
In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis c sei $\gamma = 36°$.
D sei der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von <BAC mit der Seite a.
Zeige, dass die Dreiecke CAD und BDA ebenfalls gleichschenklig sind!

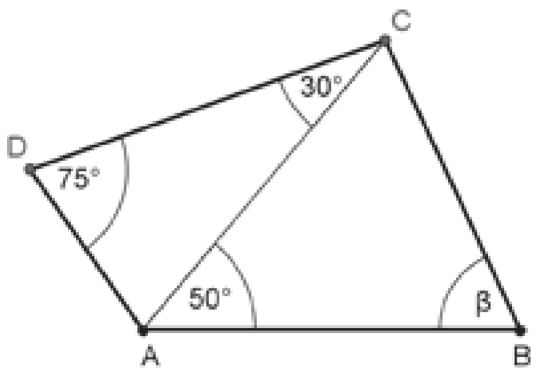


L

Lösung
<BAC = <CBA = (180° − 36°) : 2 = 72°
(Winkelsumme Dreieck ABC)
<DAC = <BAD = 36° (Winkelsymmetrale)
Daher ist das Dreieck CAD gleichschenklig mit AD = CD, weil
<DAC = γ = 36°.
<ADB = 180° − 72° − 36° = 72° (Winkelsumme Dreieck ABD)
Daher ist das Dreieck BDA gleichschenklig mit AB = AD, weil <DBA = <ADB = 72°.

B

Beispiel G1.07
Einige Winkel des allgemeinen Vierecks sind in der Skizze eingezeichnet.
Es gilt: AB = CD
Wie groß ist der Winkel β?
(Nach Känguru 2004 Junior!)

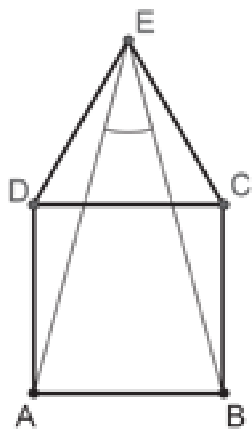


L

Lösung
<CAD = 180° − 30° − 75° = 75°
(Winkelsumme Dreieck ACD)
Das Dreieck ACD ist somit gleichschenklig mit
DC = AC, weil <ADC = <CAD gilt.
Daher ist auch das Dreieck ABC gleichschenklig mit AC = AB und es gilt:
β = <ACB = (180° − 50°) : 2 = 65° (Winkelsumme im Dreieck ABC)

B

Beispiel G1.08
ABCD ist ein Quadrat und CED ist ein gleichseitiges Dreieck außerhalb des Quadrats.
Wie groß ist der Winkel <AEB?
(Nach Känguru 2002 Junior!)



L

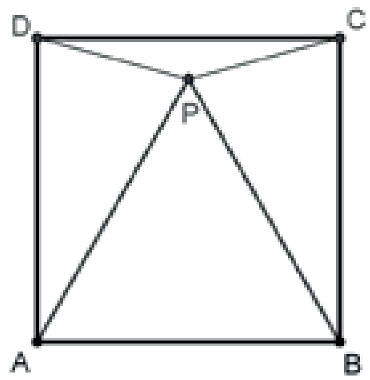
Lösung
Aufgrund der Angabe sind sechs Seiten (jene des Quadrats ABCD und des gleichseitigen Dreiecks DCE) in der Skizze gleich lang.
<DEC = <ECD = <CDE = 60° (Dreieck CED gleichseitig)
<ECB = <ADE = 60° + 90° = 150°
<BEC = <DEA = (180° − 150°) : 2 = 15°
(gleichschenklige Dreiecke EBC und AED)
<AEB = 60° − 15° − 15° = 30°

B

Beispiel G1.09
ABCD ist ein Quadrat und ABP ist ein gleichseitiges Dreieck innerhalb des Quadrats.
Beweise, dass <DCP = <PDC = 15° !
(Nach Monoid 89, siehe auch Beispiel G2.09!)

L

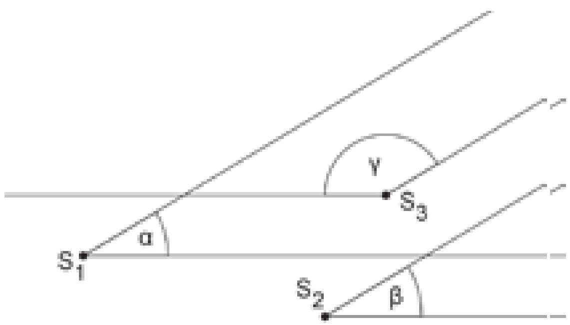
Lösung
Aufgrund der Angabe sind die Seiten des Quadrats ABCD und des gleichseitigen Dreiecks ABP gleich lang.
Daher sind die beiden Dreiecke CPB und PDA gleichschenklig.
<PBA = <BAP = 60° (Dreieck ABP gleichseitig)
<CBP = <PAD = 90° − 60° = 30° (Komplementärwinkel)
<BPC = <PCB = (180° − 30°) : 2 = 75°
(gleichschenkliges Dreieck CPB)
<DCP = 90° − 75° = 15° (Komplementärwinkel)
Analog folgt <PDC = 15°.



I

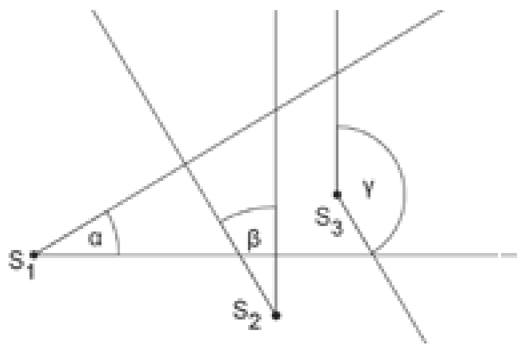
Bei einigen Beispielen können **Parallelwinkel** oder **Normalwinkel** behilflich sein bzw. den Lösungsweg beschleunigen.
Zur Erinnerung:
Bei Parallelwinkel sind entsprechende Schenkel parallel zueinander, bei Normalwinkel stehen sie aufeinander normal.
Parallelwinkel / Normalwinkel sind entweder gleich groß oder supplementär.

Parallelwinkel



β ist ein gleich großer Parallelwinkel zu α.
γ ist ein supplementärer Parallelwinkel zu α.

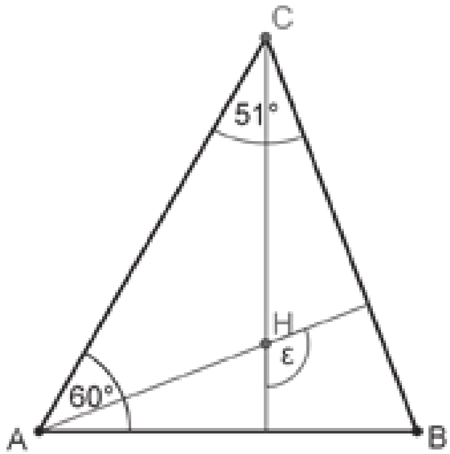
Normalwinkel



β ist ein gleich großer Normalwinkel zu α.
γ ist ein supplementärer Normalwinkel zu α.

B

Beispiel G1.10
In einem Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H betragen die Winkel $\alpha = 60°$ und $\gamma = 51°$.
Wie groß ist der Winkel ε (siehe Skizze)?
(WMDW 2005, siehe auch Beispiel G3.06!)

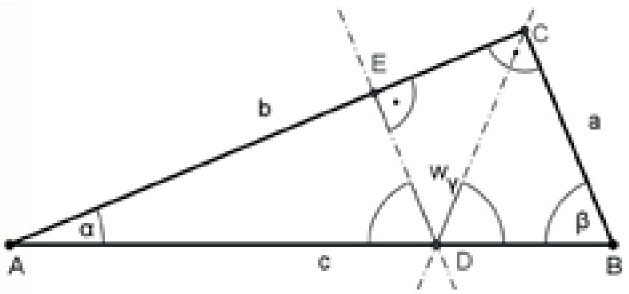


L

Lösung
$\beta = \sphericalangle CBA = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 60° - 51° = 69°$
(Winkelsumme im Dreieck ABC)
Die Schenkel der beiden Winkel stehen normal aufeinander:
AH steht normal auf BC und CH steht normal auf AB
(Definition der Höhe)
ε und β sind daher Normalwinkel. Sie müssen supplementäre Normalwinkel sein, weil β spitz und ε stumpf ist.
$\varepsilon = 180° - \beta = 180° - 69° = 111°$

B

Beispiel G1.11
In einem rechtwinkligen Dreieck (rechter Winkel in C) wird die Winkelsymmetrale w_γ im Punkt C eingezeichnet. Der Schnittpunkt von w_γ mit der Seite c heiße D. Nun stelle man das Lot (= die Normale) auf die Seite b durch den Punkt D auf. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Seite b heiße E.
Berechne β, wenn $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDC$ gilt!



L

1. Lösung
$\sphericalangle ECD = \sphericalangle DCB = 90° : 2 = 45°$ (Winkelsymmetrale)
Die spitzen Winkel $\sphericalangle EDA$ und β sind Parallelwinkel, weil $AD \parallel DB$ und $DE \parallel BC$ gilt.
Also gilt: $\sphericalangle EDA = \beta$
Das Dreieck DBC ist daher gleichschenklig, weil $\sphericalangle BDC = \sphericalangle EDA = \beta$
$\beta = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$ (gleichschenkliges Dreieck DBC)

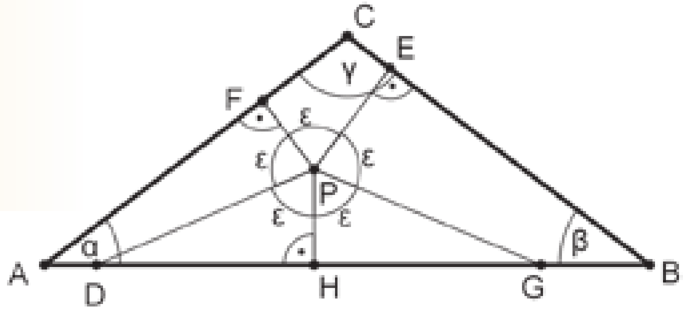
Ohne Hilfe des Parallelwinkels ginge es auch so:

L

2. Lösung
$\sphericalangle ECD = \sphericalangle DCB = 90° : 2 = 45°$ (Winkelsymmetrale)
$\sphericalangle CDE = 90° - 45° = 45°$ (Winkelsumme im Dreieck EDC)
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDC = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$ (gestreckter Winkel $\sphericalangle BDA$)
$\beta = 180° - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BDC = 180° - 45° - 67{,}5° = 67{,}5°$ (Winkelsumme im Dreieck DBC)

B

Beispiel G1.12
Die mit ε bezeichneten Winkel sind alle gleich groß. (Achtung! Die Skizze ist ungenau.)
Wie groß sind die Winkel α, β und γ des Dreiecks ABC?



L

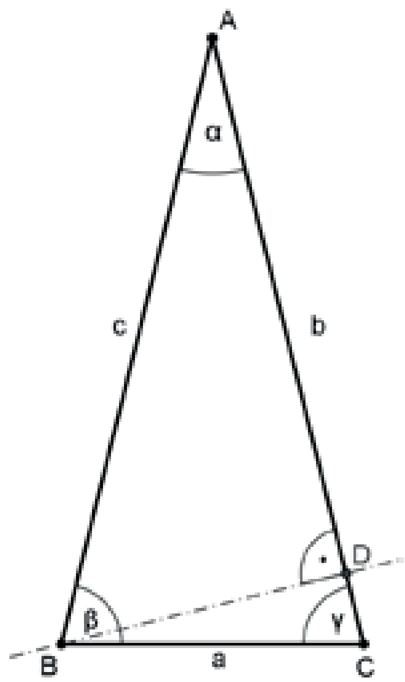
Lösung
$\varepsilon = 360° : 5 = 72°$
$\gamma = 180° - 72° = 108°$
(ε und γ sind supplementäre Normalwinkel)
$\alpha = \beta = 180° - 2\varepsilon = 180° - 144° = 36°$
(α und β sind supplementäre Normalwinkel zu 2ε)

I

Bisher haben wir bei der Winkeljagd immer einen Winkel nach dem anderen ausgerechnet, bis wir die Größe des gesuchten Winkels angeben konnten. Oft ist es aber auch notwendig, einen Winkel durch einen oder mehrere andere **mit Hilfe von Variablen auszudrücken**.

B

Beispiel G1.13
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis a wird die Höhe auf die Seite b mit dem Höhenfußpunkt D eingezeichnet.
Drücke die Größe des Winkels <CBD durch die Größe von α aus!



L

Lösung
$\gamma = (180° - \alpha) : 2$ (gleichschenkliges Dreieck ABC)
<CBD $= 90° - \gamma = 90° - (180° - \alpha) : 2 =$

$= 90° - (90° - \alpha : 2) = 90° - 90° + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

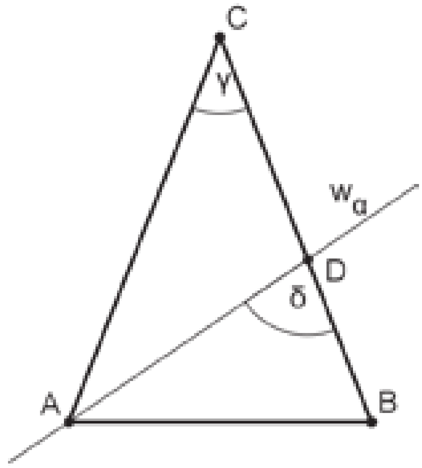
(Dreieck BCD ist rechtwinklig.)

Der Winkel <CBD ist also immer genau die Hälfte von α!
Vergleiche Beispiel G1.13 mit Beispiel G1.01! Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei G1.13 mit Variablen gerechnet wird, weil die Größe von α nicht angegeben ist.

B

Beispiel G1.14

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, AB ist die Basis. Gegeben ist die Größe des Winkels $\gamma = \sphericalangle ACB$. Die Winkelsymmetrale w_α des Winkels $\sphericalangle BAC$ schneidet die Seite BC im Punkt D. Den Winkel $\sphericalangle ADB$ nennen wir δ. Wie groß ist δ (in Abhängigkeit von γ)?



L

Lösung

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = (180° - \gamma) : 2$
(Winkelsumme im Dreieck ABC)
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC : 2 = (180° - \gamma) : 4$
(w_α ist Winkelsymmetrale)
$\delta = 180° - (180° - \gamma) : 2 - (180° - \gamma) : 4 =$

$$= 180° - 90° + \frac{\gamma}{2} - 45° + \frac{\gamma}{4} = 45° + \frac{3\gamma}{4}$$

B

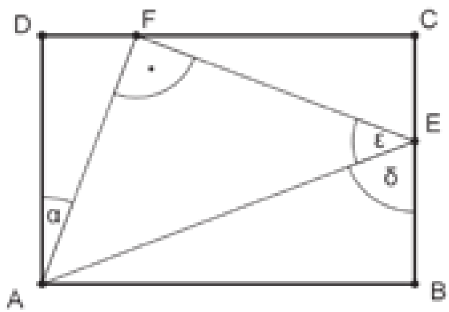
Beispiel G1.15

ABCD ist ein Rechteck, E ein Punkt auf BC und F ein Punkt auf CD. Die Strecke AF steht auf FE normal. Die Winkel $\alpha = \sphericalangle FAD$ und $\delta = \sphericalangle AEB$ sind komplementär. Drücke die Größe des Winkels $\varepsilon = \sphericalangle FEA$ durch α aus!

L

1. Lösung

$\sphericalangle EFC$ ist ein Normalwinkel zu α und als Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck auch spitz, also gleich groß wie α.
$\sphericalangle CEF = 90° - \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck FEC)
$\varepsilon = 180° - \sphericalangle CEF - \sphericalangle AEB$ ($\sphericalangle CEB = 180°$)
$\varepsilon = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \alpha) = 2\alpha$



L

2. Lösung

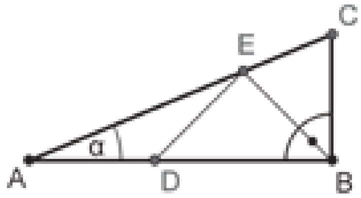
$\sphericalangle BAE = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck ABE)
$\sphericalangle EAF = 90° - 2\alpha$ (rechter Winkel $\sphericalangle BAD$)
$\varepsilon = 90° - \sphericalangle EAF = 2\alpha$ (Winkelsumme im Dreieck AEF)

I

Manchmal gelingt es nicht so einfach, einen Winkel nach dem anderen auszurechnen. Oft lassen sich solche Beispiele bearbeiten, indem man eine **Gleichung** aufstellt und dann löst.

B

Beispiel G1.16
Die Strecken AD, DE, EB und BC in nebenstehender Skizze sind gleich lang.
Überlege, wie groß der Winkel α ist!
(WMDW 1991)



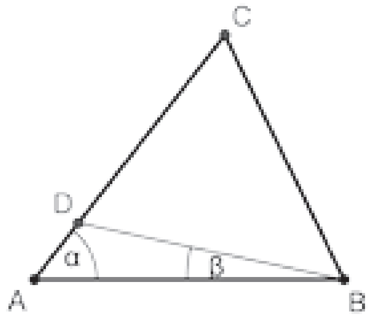
L

Lösung
$<ACB = 90^\circ - \alpha$ (rechtwinkliges Dreieck ABC)
$<BEC = <ACB = 90^\circ - \alpha$ (gleichschenkliges Dreieck CEB)
$<CBE = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$ (Winkelsumme im Dreieck CEB)
$<EBD = 90^\circ - <CBE = 90^\circ - 2\alpha$ (Komplementärwinkel)
$<BDE = <EBD = 90^\circ - 2\alpha$ (gleichschenkliges Dreieck DBE)
$<DEB = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\alpha) = 4\alpha$ (Winkelsumme im Dreieck DBE)
$<AED = \alpha$ (gleichschenkliges Dreieck EAD)
Nun kann man für den gestreckten Winkel $<AEC$ eine Gleichung aufstellen:

$<AEC = <AED + <DEB + <BEC = 180^\circ$
$\alpha + 4\alpha + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$
$4\alpha = 90^\circ$
$\alpha = 22{,}5^\circ$

B

Beispiel G1.17
Im Dreieck, das nebenan skizziert ist, gilt:
$AB = AC$, $BC = BD$ sowie $\beta = 12^\circ$
Wie groß ist der Winkel α?
(WMDW 1993)



L

1. Lösung
$<CBA = <ACB = (180^\circ - \alpha) : 2$ (Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck ABC)
$<BDC = <DCB = <ACB = (180^\circ - \alpha) : 2$ (gleichschenkliges Dreieck BCD)
$<CBD = (180^\circ - \alpha) : 2 - \beta = (180^\circ - \alpha) : 2 - 12^\circ$
Nun kann man für die Winkelsumme im Dreieck DBC eine Gleichung aufstellen:

$<CBD + <DCB + <BDC = 180^\circ$
$(180^\circ - \alpha) : 2 - 12^\circ + 2(180^\circ - \alpha) : 2 = 180^\circ \quad | \cdot 2$
$180^\circ - \alpha - 24^\circ + 360^\circ - 2\alpha = 360^\circ$
$156^\circ = 3\alpha$, also $\alpha = 52^\circ$

L

2. Lösung
Wie bei Lösung 1 gelangt man zu $<BDC = <DCB = <ACB = (180^\circ - \alpha) : 2$
$<CBD = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) : 2 = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck BCD)
Nun kann man für die Winkelsumme im Dreieck ABC eine Gleichung aufstellen:

$<BAC + <ACB + <CBD + <DBA = 180^\circ$
$\alpha + (180^\circ - \alpha) : 2 + \alpha + 12^\circ = 180^\circ \quad | \cdot 2$
$2\alpha + 180^\circ - \alpha + 2\alpha + 24^\circ = 360^\circ$
$3\alpha = 156^\circ$, also $\alpha = 52^\circ$