1 Mengen, Zahlen und Rechengesetze

Einstieg

Goldbach'sche Vermutung:
Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.
Für den Beweis dieser Vermutung wurden 1.000.000 € Belohnung ausgesetzt.

Christian Goldbach (1690 – 1764) war deutscher Mathematiker, der wertvolle Beiträge zur Zahlentheorie leistete.

E1 Was lernst du in diesem Kapitel?

In diesem Abschnitt hast du die Gelegenheit, Lücken aus der Unterstufe zu schließen. Du lernst einerseits die **Sprache der Mathematik** kennen und verstehen, andererseits tauchst du in die faszinierende Welt der Zahlen ein (Mathematiker sprechen von „**Zahlentheorie**").

Du wirst dich fragen: Was soll an Zahlen so interessant sein?

Besonders in der Kryptologie (Lehre der Verschlüsselung von Botschaften) werden Primzahlen häufig eingesetzt, und es werden große Geldbeträge bezahlt für das Auffinden von Formeln, mit denen man z.B. große Primzahlen berechnen kann.

Es gibt viele ungelöste Probleme in der Zahlentheorie, die der Mathematiker David Hilbert zusammenfasste (23 Hilbert'sche Probleme, davon wurden 13 schon umfassend gelöst). Das bekannteste Problem ist die sogenannte Goldbach'sche Vermutung, für deren Beweis 1 Million Euro ausgeschrieben wurde.

In der Informatik werden Zahlen in anderen Zahlensystemen (Binärsystem, Hexadezimalsystem) dargestellt. Dieses Kapitel gibt dir einen Einblick, wie man z.B. die Zahl 25 im Binärsystem darstellt, welches nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht.

In diesem Kapitel werden die wesentlichen **Grundlagen der Unterstufe** (**ggT**, **kgV**, **Bruchrechnen**, **direkte und indirekte Proportionalität**, …) wiederholt, sodass du für die folgenden Kapitel gut gerüstet bist.

E2 Am Ende des Kapitels kannst du vermutlich noch nicht die Goldbach'sche Vermutung beweisen, dafür aber …

- mit Mengen und Aussagen arbeiten.
- die Eigenschaften der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erfassen.
- die wesentlichen arithmetischen Grundregeln (Vorrangregeln, Teiler, Primfaktoren, ggT, kgV, Bruchrechnen) anwenden.
- die Prozentrechnung in allen Varianten ausführen.
- Zahlen auch in anderen Zahlensystemen darstellen.
- mit Zehnerpotenzen rechnen.

Grundkompetenzen für die schriftliche Reifeprüfung

- AG-R 1.1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können.

digi.schule/am5k1

Das Rätsel von den drei Kindern

1.1.01

digi.schule/am5k11a01

Das folgende Rätsel scheint auf den ersten Blick eine Scherzaufgabe zu sein, ist es aber nicht. Durch die Kombination aus logischem Denken und der Anwendung einfacher mathematischer Grundlagen aus der Unterstufe kannst du dieses Rätsel lösen.

Der Mathematiker Prof. Mück trifft nach langer Zeit in der Mensa wieder einmal seine berühmte Kollegin Frau Prof. Meisinger.

Mück: „Guten Abend, meine Beste. Wie geht es Ihnen?“

Meisinger: „Hervorragend, danke. Und wie läuft es bei Ihnen?“

Mück: „Sehr gut. Sie wissen, dass ich inzwischen drei Kinder habe?“

Meisinger: „Wirklich? Wie alt sind sie denn?“

Mück: „Nun ja, Sie als gute Mathematikerin müssten es doch rasch berechnen können: Das Produkt ihrer Lebensalter ist 36, und die Summe ihrer Lebensalter ist identisch mit Ihrer Hausnummer.“

Meisinger nach einiger Zeit des Nachdenkens: „Diese Informationen reichen mir nicht.“

Mück: „Sie haben recht. Das älteste Kind hat rote Haare.“

Meisinger: „Aha, jetzt weiß ich, wie alt sie sind!“

Wie alt sind die drei Kinder?

Zu wenig Informationen? Eine Primfaktorenzerlegung könnte hier hilfreich sein …

Aussage

Definition

Eine **Aussage** ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.
D.h. eine Aussage kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Wahr (w) und **falsch** (f) nennt man **Wahrheitswerte**.

Beispiele für Aussagen

Demo 1.1.02

Im Folgenden sind einige Beispiele für Aussagen bzw. für Sätze, die keine Aussagen sind, angeführt.

$4 + 5 = 9$	wahre Aussage (w)
$4 > 7$	falsche Aussage (f)
8 ist eine Primzahl	f
$5 \mid 10$ (d.h. 5 ist ein Teiler von 10)	w
Iss dein Schnitzel!	keine Aussage
$4x + 4 = 8$	Aussageform: Sie wird erst w oder f, wenn man einen Wert für die Variable x kennt.

Eine Primzahl ist nur durch zwei verschiedene Zahlen teilbar (durch 1 und sich selbst). Die kleinste Primzahl ist also 2.

Aussageform und Variable

Definition

Eine **Aussageform** ist ein Ausdruck, der eine oder mehrere Variable enthält (du hast die Aussageform als „Gleichung“ kennengelernt).
Eine **Variable** ist also ein Platzhalter in einer Aussageform.

Erst wenn man für die Variable einen bestimmten Wert einsetzt, wird aus der Aussageform eine (wahre oder falsche) Aussage.

1.1 Die Sprache der Mathematik - Aussagenlogik

Demo 1.1.03

Der **Wahrheitsgehalt** einer Aussage gibt an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.
$x|8$: „x teilt 8“ (restos)

Aussageformen werden zu Aussagen

Aussageform $A(x)$	Wert der Variable x	Aussage A	Wahrheitsgehalt
$x+1=3$	$x=2$	$A(2): 2+1=3$	w
	$x=5$	$A(5): 5+1=3$	f
$x\|8$	$x=2$	$A(2): 2\|8$	w
	$x=5$	$A(5): 5\|8$	f

Definition

$\forall$: „für alle“
$\exists$: „es existiert“
Diese Symbole heißen Existenzquantor und Allquantor.

Allaussagen und Existenzaussagen

Eine Allaussage umfasst stets alle Elemente x aus einer Menge $\mathbb{G}$.

Man schreibt: $\forall x \in \mathbb{G}: A(x)$ (sprich: „Für alle Elemente der Menge $\mathbb{G}$ gilt die Aussage $A(x)$.“)
Eine Existenzaussage gilt für mindestens ein Element aus einer Menge $\mathbb{G}$.

Man schreibt: $\exists x \in \mathbb{G}: A(x)$ (sprich: „Es existiert mindestens ein Element der Menge $\mathbb{G}$, für welches die Aussage $A(x)$ gilt.“)

Definition

$\neg A$: „nicht A“

Negation (Verneinung)

Die Negation $\neg A$ der Aussage A ist jene Aussage, die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist, und genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Demo 1.1.04

Negation von Aussagen

Aussage	Negation
$A: 1+1=2$ (w)	$\neg A: 1+1\neq 2$ (f)
$A: 2\cdot 4=5$ (f)	$\neg A: 2\cdot 4\neq 5$ (w)
A: Alle Primzahlen sind gerade. (f)	$\neg A$: Nicht alle Primzahlen sind gerade. (w)

Beim Verneinen von Aussagen musst du sehr aufpassen:

Die Verneinung von „Alle Primzahlen sind gerade.“ ist NICHT „Alle Primzahlen sind ungerade.“, sondern „Nicht alle Primzahlen sind gerade.“ (D.h., es gibt mindestens eine Primzahl, die ungerade ist).

Weitere Beispiele für die Negation von Allaussagen:

Aussage: „Jedes Kind ist klein“.
Verneinung: „Nicht jedes Kind ist klein.“ (D.h., es gibt mindestens ein großes).

Aussage: „Alle Fische können schwimmen.“
Verneinung: „Nicht alle Fische können schwimmen.“ (Der Satz „Kein Fisch kann schwimmen.“ wäre daher keine Verneinung der Aussage.)

Negation von Allaussagen und Existenzaussagen

Demo 1.1.05

Bilde die Negationen folgender Aussagen:
A: Es gibt (mindestens) eine Zahl x, welche die Gleichung $x + 2 = 3$ erfüllt, d.h. formal:
$\exists x: x + 2 = 3$
B: Alle natürlichen Zahlen sind durch 2 teilbar, d.h. formal: $\forall x: 2|x$

<u>Lösungsweg:</u>
$\neg A$: Es gibt keine Zahl x, welche die Gleichung $x + 2 = 3$ erfüllt, d.h. formal:
$\nexists\, x: x + 2 = 3$
Oder als (äquivalente) Allaussage:

$\neg A$: Für jede Zahl x stimmt die Gleichung nicht, d.h. formal: $\exists x: 2\nmid x$

$\neg B$: Nicht alle natürlichen Zahlen sind durch 2 teilbar, d.h. es gibt eine natürliche Zahl x, die nicht durch 2 teilbar ist, formal: $\exists x: 2\nmid x$

Die Negation einer Allaussage ist somit eine Existenzaussage über die gegenteilige Eigenschaft und die Negation einer Existenzaussage ist somit eine Allaussage über die gegenteilige Eigenschaft.

$2|x$ „2 teilt x" oder „x ist durch 2 teilbar"

$2\nmid x$ „2 teilt x nicht" oder „x ist nicht durch 2 teilbar"

Konjunktion (UND-Verknüpfung) und Disjunktion (ODER-Verknüpfung)

Definition

Die **Konjunktion** $A \wedge B$ (sprich: „A und B") ist die **UND-Verknüpfung** zweier Aussagen A und B. Sie ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Die **Diskonjunktion** $A \vee B$ (sprich: „A oder B") ist die **ODER-Verknüpfung** zweier Aussagen A und B. Sie ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Konjunktion und Disjunktion

Demo 1.1.06

Gegeben sind die Aussagen A: $2 < 8$ und B: $2 + 8 = 4$.

Ermittle den Wahrheitsgehalt der Verknüpfungen $A \wedge B$ und $A \vee B$.

<u>Lösungsweg:</u>
Die Aussage A ist wahr (w), die Aussage B ist falsch (f).

Die Aussage $A \wedge B$ ist falsch, da (mindestens) eine der beiden Aussagen A bzw. B falsch ist. Nur falls beide Aussagen A und B wahr sind, ist auch die Konjunktion wahr.

Die Aussage $A \vee B$ ist wahr, da (mindestens) eine der beiden Aussagen A bzw. B wahr ist. Nur falls keine der beiden Aussagen A und B wahr ist, ist auch die Disjunktion falsch.

Demo 1.1.07

Wahrheitstafel

Gegeben sind zwei Aussagen A und B.

Stelle eine Wahrheitstafel für die Verknüpfung $A \vee B$ und $A \wedge B$ auf.

Lösungsweg:
Eine Wahrheitstafel berücksichtigt alle Fälle bzw. Kombinationen der Wahrheitsgehalte von A und B. Für jeden Fall wird dann der Wahrheitsgehalt der Verknüpfungen (entsprechend der vorhin besprochenen Regeln) ermittelt und in die folgende Tabelle eingetragen:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Demo 1.1.08

Gleichheit (Äquivalenz) von Aussageverknüpfungen

Zeige anhand einer Wahrheitstafel, dass die Wahrheitswerte von $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ äquivalent sind. Dieser Sachverhalt ist eines der Gesetzte von De Morgan.

Lösungsweg:
Erstelle schrittweise eine Wahrheitstafel mit A, B, $\neg A$, $\neg B$, $A \wedge B$, $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Die letzten beiden Spalten der Tabelle sind identisch, damit ist die Äquivalenz der beiden Aussageverknüpfungen bewiesen.

Augustus de Morgan, 1806-1871, war ein englischer Mathematiker und ist bis heute für seine De Morgan'schen Gesetze aus der Logik bekannt.

Definition

Implikation (WENN-DANN-Beziehung) und Äquivalenz (GENAU-DANN-WENN-Beziehung)

Die Implikation (WENN-DANN-Beziehung) $A \Rightarrow B$ zwischen zwei Aussagen A und B ist nur dann falsch, wenn aus etwas Wahrem Falsches folgt.

Die Äquivalenz (GENAU-DANN-WENN-Beziehung) $A \Leftrightarrow B$ zwischen zwei Aussagen A und B ist genau dann wahr, wenn die Wahrheitswerte beider Aussagen übereinstimmen.

Implikation

Demo 1.1.09

Erstelle die Wahrheitstafel der Implikation $A \Rightarrow B$ für die Aussagen A: „Es regnet." und B: „Die Straße wird nass."

Lösungsweg:
Die Implikation $A \Rightarrow B$ lautet hier:
WENN es regnet, DANN wird die Straße nass.

Wahrheitstafel:

A: Es regnet.	B: Die Straße wird nass.	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation ist also nur falsch, wenn es regnet und die Straße nicht nass wird (denn das widerspricht der „Regel" $A \Rightarrow B$).
Wenn es nicht regnet, und die Straße trotzdem nass wird, ist diese Regel $A \Rightarrow B$ nicht verletzt worden. (Vielleicht hat jemand mit dem Gartenschlauch die Straße besprüht.)

Den Umkehrschluss darf man bei einer Implikation aus diesem Grund nicht machen. Die Aussage „Wenn die Straße nass ist, dann hat es geregnet", gilt also aus Sicht der **Aussagenlogik** nicht.

Es gilt aber folgende Umkehrung: $\neg B \Rightarrow \neg A$ Das würde hier heißen: Ist die Straße trocken, kann es nicht regnen!

Äquivalenz

Demo 1.1.10

Erstelle die Wahrheitstafel der Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ für die Aussagen A: x ist durch 2 teilbar. und B: x ist eine gerade Zahl.

Lösungsweg:
Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ lautet hier:
x ist GENAU DANN durch 2 teilbar, WENN x eine gerade Zahl ist.

Wahrheitstafel:

A: x ist durch 2 teilbar.	B: x ist eine gerade Zahl.	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	w	w
w	w	w
w	w	w

Die Äquivalenz ist also nur dann wahr, falls die Zahl gerade und durch 2 teilbar ist, oder falls sie ungerade und nicht durch zwei teilbar ist.

Daher erlaubt die Äquivalenz den Umkehrschluss: Die Implikation gilt also in beide Richtungen, wie auch der Doppelpfeil symbolisiert.

$A \Leftrightarrow B$ ist das gleiche wie: $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$

1.1 Die Sprache der Mathematik - Aussagenlogik

1.1.11 H3

digi.schule/am5k11a11

Aussage oder nicht?

Entscheide, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage, eine Aussageform oder keine Aussage handelt.

a) 7 ist durch 6 ohne Rest teilbar.

b) 11 ist eine Primzahl.

c) Multipliziert man eine Zahl mit 4, erhält man 42.

d) $-9 < -3$

e) Überprüfe, ob es sich um eine wahre Aussage handelt.

f) $9 \cdot x \neq 3$

g) Salzburg ist die Hauptstadt von Salzburg.

h) Eine Zahl ist durch 5 teilbar.

1.1.12 H2, H3

digi.schule/am5k11a12

All- oder Existenzaussage?

Finde heraus, ob es sich um All- oder Existenzaussagen handelt. Überprüfe deren Wahrheitsgehalt und formuliere die Negation.

a) Alle Primzahlen sind ungerade.

b) Es gibt Rauten mit rechten Winkeln.

c) Es gibt keine Rechtecke, die Quadrate sind.

d) Die Winkelsumme jedes Dreiecks beträgt 180°.

1.1.13 H2, H3

digi.schule/am5k11a13

Äquivalenz oder Implikation?

Überprüfe, ob es sich um eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$, eine Implikation $A \Rightarrow B$, eine Implikation $B \Rightarrow A$ oder keines der drei handelt und formuliere symbolisch.

a) A: x ist durch 2 teilbar. B: x ist durch 6 teilbar.

b) A: x ist ungerade. B: x ist durch 3 teilbar.

c) $A: x \cdot y = 0$; $B: x = 0 \vee y = 0$

d) $A: x > 3$; $B: x > -6$

e) A: Das Dreieck mit den Seiten a, b, c ist rechtwinkelig.
B: Für das Dreieck gilt der Satz des Pythagoras.

1.1.14 H3

digi.schule/am5k11a14

Aussagenverknüpfungen

Gegeben sind folgende Aussagenverknüpfungen. Finde die Einzelaussagen A und B und formuliere ihre Verknüpfung symbolisch.

a) 6 ist durch 2 und durch 3 teilbar.

b) Wenn es regnet, wird die Strasse nass.

c) 18 ist größer als 10, aber auch kleiner als 30.

d) 16 ist das gleiche wie $4 \cdot 4$.

1.1.15 H3

digi.schule/am5k11a15

Aussageverknüpfungen formulieren

Gegeben sind folgende Aussagenverknüpfungen. Finde die Einzelaussagen A und B und formuliere symbolisch ihre Verknüpfung.

a) Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

b) Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.